

Elgondolkodtató problémák - matematikai szemmel, gépi segítséggel

Csizmadia László

2016. 02. 26.

Németh László Gimnázium
Hódmezővásárhely

43. ORSZAGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKVERSENY ORSZÁGOS DÖNTŐ 2. FORDULÓ ÖTÖDIK OSZTÁLY

A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk 3×3 -as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető háromszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha sem tükrözéssel, sem mozgatással nem hozhatóak fedésbe.

Születésnap paradoxon

Hány fős társaság esetén nagyobb 50%-nál annak az esélye, hogy a társaság két tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja?

- 1) Egy hétre szűkítve:
- a) Hány fős társaság esetén lesz biztosan két olyan ember, akik ugyanazon a napon születtek?
- b) Mekkora az esélye egy 5 fős társaság esetén, hogy közülük kettőnek ugyanarra a napra esik a születésnapja?
- 3) Hány fős társaság esetén lesz 96% esélye annak, hogy két embernek ugyanarra a napra esik a születésnapja?

- 8

- Összes eset: a hét bármely napján születhet bárki; 7^5

Rossz esetek: mindenki más napon született; $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Kedvező esetek: Összes-Rossz

Valószínűség:

$$\frac{7^5 - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = 0.85$$

-

$$\frac{365^n - 365 \cdot 364 \cdots (365 - (n - 1))}{365^n} = 0.5$$

Hogyan oldjuk meg az ilyen egyenletet? Géppel!

Meddig varjunk?

Az eredeti feladat(Secretary problem): Egy munkahely titkárnői álláshirdetést ad föl. Olyan sokan jelentkeznek, hogy nem tudjak mindegyiket meghallgatni. Hány százalékát elég a jelölteknek meghallgatni, hogy a legnagyobb eséllyel a legjobbat vegyék föl? - Szindbád-probléma: <http://www.renyi.hu/major/debrecen/debrecen2001b/szindbad.pdf>

Tegyük fel, hogy mindössze 10 jelentkező van, továbbá, hogy a jelentkezők felét már meghallgattuk, de mindegyiket elutasítottuk. A következő legjobbat, aki jobb, mint az addigiak, azonban már föl vesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy mind közül a legjobbat sikerül így kiválasztani?

Az első 5-öt elengedjük. Mi az esélye, hogy 6-ként jön a nagy Ő?

$$\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

A 7. hely esetén csak akkor választjuk, ha a 6. nem jobb, mint az első 5 - ezt kell kizárni. Így az esélye:

$$\frac{5 \cdot 5!}{6!} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{6} \frac{1}{10}$$

A 8., 9. és 10. helyen rendre

$$\frac{5}{7} \frac{1}{10}, \quad \frac{5}{8} \frac{1}{10}, \quad \frac{5}{9} \frac{1}{10}$$

$$P(5, 10) = \frac{5}{10} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = 0,37$$

Stratégia: n jelentkezőből elengedjük az első k -t, és választjuk az őket követő legjobbat. Mi az esélye, hogy sikerül a legjobbat megtalálni?

$$P(k, n) = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$$

Van-e es ha igen, milyen k esetén maximuma a $P(k, n)$ függvénynek?

$$P(k, n) = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{n}{i} \cdot \frac{1}{n}$$

Integrálközelítő összeg!

Tekintsük az

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

függvényt, továbbá vegyük az $x = \frac{k}{n}$ és 1 közötti intervallum ekvidisztáns fölosztását. Az ehhez tartozó felső közelítő összegek sorozatából kapjuk:

$$P(x) = x \cdot \int_x^1 f(t) = -x \ln x$$

Van-e ennek maximuma? Deriváljuk...

$$x = \frac{1}{e}$$

Azaz:

$$k = \frac{n}{e}$$

a jelentkezők 37%-at elengedve azt kell választani, aki jobb, mint az előzőek, ha ilyen nincs, akkor az utolsót. Ezzel tudjuk garantálni a maximális esélyt a legjobb megtalálására.

Köszönöm a figyelmet!